分離公理・一様構造・距離化定理：自己完結的詳説

【全項目詳細目次】

1. 基礎：分離公理とHausdorff空間

位相空間 (X, τ) において、点や集合をどれだけ「引き離せるか」は、その空間で扱える関数の豊富さを決定します。

定義 1.1：分離公理 (T_0, T_1, T_2)

- T_0 **(Kolmogorov)**: 異なる 2 点に対し、一方を含み他方を含まない開集合が存在する。
- T_1 **(Fréchet)**: 異なる 2 点 x, y に対し、$x \in U, y \notin U$ かつ $y \in V, x \notin V$ となる開集合 U, V が存在する。（これは一点集合 $\{x\}$ が閉集合であることと同値）
- T_2 **(Hausdorff)**: 異なる 2 点 x, y に対し、$U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する。

定義 1.2：正則空間と正規空間

- **正則 (Regular)**: 閉集合 F と $x \notin F$ に対し、それらを分離する互いに素な開集合が存在する。T_1 を満たす正則空間を T_3 空間と呼ぶ。
- **正規 (Normal)**: 互いに素な閉集合 A, B に対し、それらを分離する互いに素な開集合が存在する。T_1 を満たす正規空間を T_4 空間と呼ぶ。

2. 正規空間の深層：ウリゾーンの補題の完全証明

正規空間は、「開集合による分離」を「連続関数による分離」に変換できるという驚異的な性質を持ちます。

定理 2.1：ウリゾーンの補題 (Urysohn's Lemma)

X を正規空間とする。A, B を X の互いに素な閉集合とするとき、連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在して、$x \in A \implies f(x) = 0$ および $x \in B \implies f(x) = 1$ を満たす。

【完全証明】

ステップ 1：二進有理数に基づく開集合族の構成

$[0, 1]$ 内の二進有理数の集合 $D = \{\frac{k}{2^n} \mid n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n\}$ を考える。D は $[0, 1]$ で稠密である。$r \in D$ に対し、開集合 U_r を以下の条件を満たすように帰納的に定義する：

$$r < s \implies \overline{U_r} \subseteq U_s$$

まず、$U_1 = X \setminus B$ とおく。$A \cap B = \emptyset$ より $A \subseteq U_1$ である。 X は正規なので、閉集合 A と開集合 U_1 に対し（$A \subseteq U_1$）、ある開集合 U_0 が存在して $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$ を満たす。 次に $r = 1/2$ に対し、$\overline{U_0} \subseteq U_1$ であるから、正規性より $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$ となる $U_{1/2}$ をとる。 これを繰り返し、分母が 2^n の点に対して順次 U_r を構成する。具体的には、$r = \frac{2k+1}{2^n}$ に対して、$s = \frac{2k}{2^n}$ と $t = \frac{2k+2}{2^n}$ の間に、$\overline{U_s} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_t$ となる U_r を正規性から選ぶ。

ステップ 2：関数の定義

$x \in X$ に対し、関数 $f(x)$ を以下のように定義する：

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in D \mid x \in U_r\} & (x \in U_1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x \notin U_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

明らかに $x \in A \implies x \in U_0 \implies f(x) = 0$。 また $x \in B \implies x \notin U_1 \implies f(x) = 1$ である。

ステップ 3：連続性の証明

f が連続であることを示すため、任意の $a \in (0, 1]$ に対し $f^{-1}([0, a))$ が開集合であり、任意の $b \in [0, 1)$ に対し $f^{-1}((b, 1])$ が開集合であることを示す。 1. $f(x) < a \iff \exists r \in D, r < a, x \in U_r$ である。よって $f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r<a} U_r$ となり、これは開集合の和なので開である。 2. $f(x) > b \iff \exists s \in D, s > b, x \notin \overline{U_s}$ を示す。 (i) $x \notin \overline{U_s}$ ならば、任意の $r \leq s$ に対し $x \notin U_r$ なので $\inf\{r \mid x \in U_r\} \geq s > b$ 。 (ii) 逆に $f(x) > b$ ならば、稠密性より $b < s < s' < f(x)$ となる s, s' をとれる。 $f(x) > s'$ より $x \notin U_{s'}$。$\overline{U_s} \subseteq U_{s'}$ なので $x \notin \overline{U_s}$。 したがって $f^{-1}((b, 1]) = \bigcup_{s>b} (X \setminus \overline{U_s})$ となり、閉集合の補集合の和なので開である。 以上より f は連続である。

■

3. ティッツェの拡張定理：逐次近似による関数構成

正規空間では、部分集合上で定義された関数を「滑らかに」空間全体へ広げることが可能です。

定理 3.1：ティッツェの拡張定理 (Tietze Extension Theorem)

X を正規空間、$F \subseteq X$ を閉集合とする。連続関数 $f : F \to [-M, M]$ が与えられたとき、X 上の連続関数 $g : X \to [-M, M]$ で、任意の $x \in F$ に対し $g(x) = f(x)$ となるものが存在する。

【完全証明】

$M=1$ として一般性を失わない。F 上の関数を X 上へ逐次近似的に拡張していく。

ステップ 1：近似関数の列の構成

$f_1=f$ とおく。$A_1=\{x\in F\mid f_1(x)\le -1/3\}, B_1=\{x\in F\mid f_1(x)\ge 1/3\}$ を定義する。これらは F の閉集合であり、X の閉集合でもある。 ウリゾーンの補題より、連続関数 $g_1:X\to[-1/3,1/3]$ で $g_1(A_1)=-1/3, g_1(B_1)=1/3$ となるものが存在する。 このとき、F 上で $|f_1(x)-g_1(x)|\le 2/3$ となる。 次に $f_2=f_1-g_1$ とおくと、f_2 は F 上の連続関数で $|f_2|\le 2/3$ である。 同様に、$A_2=\{x\in F\mid f_2(x)\le -(1/3)(2/3)\}, B_2=\{x\in F\mid f_2(x)\ge (1/3)(2/3)\}$ に対し、$g_2:X\to[-(1/3)(2/3),(1/3)(2/3)]$ を作り、 $|f_2(x)-g_2(x)|\le (2/3)^2$ とする。 これを繰り返すと、関数列 $\{g_n\}$ が得られ： 1. $|g_n(x)|\le \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ (X 全体で) 2. $|f(x)-\sum_{i=1}^{n} g_i(x)|\le (\frac{2}{3})^n$ (F 上で)

ステップ 2：収束の確認

ワイエルシュトラスの M-判定法より、級数 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ は X 上で一様収束する。 各 g_n は連続なので、その一様収束極限 g も連続である。 また $|g(x)|\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}=\frac{1/3}{1-2/3}=1$。 さらに $x\in F$ では、$\sum g_n(x)=f(x)$ となることは構成法から明らか。 ■

4. コンパクト性と分離公理：正規性の自動的導出

Hausdorff性とコンパクト性が組み合わさると、空間は自動的に正規になります。

定理 4.1：コンパクトHausdorff空間は正規である

【完全証明】

補題：点と閉集合の分離

X をHausdorff空間、$K\subseteq X$ をコンパクト集合、$p\notin K$ とする。このとき、互いに素な開集合 U,V が存在し、$p\in U, K\subseteq V$ となる。 (証明) 任意の $q\in K$ に対し、

$p \neq q$ なのでHausdorff性より $U_q \cap V_q = \emptyset$ となる開近傍がとれる。$\{V_q\}_{q \in K}$ は K の開被覆である。K はコンパクトなので有限部分被覆 $V_{q_1}, \dots, V_{q_n}$ がとれる。
$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{q_i}$、$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{q_i}$ とおけば、U は開近傍の有限交差なので開、V は開。
かつ $p \in U$ で $K \subseteq V$ であり、$U \cap V = \emptyset$ である。

本定理の証明

$A, B \subseteq X$ を互いに素な閉集合とする。コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトなので、A, B はともにコンパクト。 任意の $a \in A$ に対し、$a \notin B$ かつ B はコンパクトなので、上記補題より $U_a \cap V_a = \emptyset$ かつ $a \in U_a, B \subseteq V_a$ となる開集合がとれる。 $\{U_a\}_{a \in A}$ は A の被覆。A はコンパクトなので有限部分被覆 $U_{a_1}, \dots, U_{a_m}$ がとれる。 $U = \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j}$、$V = \bigcap_{j=1}^{m} V_{a_j}$ とおけば、これらは開集合で
$A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$。 よって X は正規である。 ■

5. 一様構造の厳密な公理化：近縁と擬距離

位相空間における「一様連続性」を議論するため、点と点の「近さ」を大域的に記述する道具が一様構造です。

定義 5.1：一様構造 (Uniform Structure)

集合 X 上のフィルター $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ が**一様構造**であるとは、 1. $\forall V \in \mathcal{U} \implies \Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq V$. 2. $V \in \mathcal{U} \implies V^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in V\} \in \mathcal{U}$. 3. $\forall V \in \mathcal{U}, \exists W \in \mathcal{U}$ s.t. $W \circ W \subseteq V$. ここで $W \circ W = \{(x,z) \mid \exists y \in X, (x,y) \in W \wedge (y,z) \in W\}$.

定理 5.1：擬距離族による生成

X 上の擬距離の族 $\{d_\alpha\}$ が与えられたとき、$V_{\alpha,\epsilon} = \{(x,y) \mid d_\alpha(x,y) < \epsilon\}$ を準基とするフィルターは一様構造をなす。逆に、任意の一様構造はある擬距離の族によって誘導される。

6. 完備性と完備化：フィルター理論による極限の再定義

距離空間の点列による完備性は、一般の一様空間ではフィルター（またはネット）へと拡張されます。

定義 6.1：コーシーフィルター

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ 上のフィルター $\mathcal{F}$ が**コーシーフィルター**であるとは、任意の近縁 $V \in \mathcal{U}$ に対して、ある $F \in \mathcal{F}$ が存在して $F \times F \subseteq V$ となることをいう。

定理 6.1：コンパクト一様空間の完備性

一様空間 X の位相がコンパクトであれば、X は完備である（すべてのコーシーフィルターが収束する）。

【完全証明】

$\mathcal{F}$ を X 上のコーシーフィルターとする。 1. X はコンパクトなので、任意のフィルターは少なくとも一つの集積点 $x \in X$ を持つ。 2. x が $\mathcal{F}$ の集積点であるとは、任意の近傍 $N(x)$ と任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $N(x) \cap F \neq \emptyset$ であることと同値。 3. $\mathcal{F}$ が x に収束することを示す。任意の近縁 $V \in \mathcal{U}$ に対し、対称な近縁 W で $W \circ W \subseteq V$ を満たすものをとる。 4. $\mathcal{F}$ はコーシーなので、ある $F_0 \in \mathcal{F}$ で $F_0 \times F_0 \subseteq W$ となる。 5. x は集積点なので、$W(x) \cap F_0 \neq \emptyset$。よって $y \in F_0$ が存在して $(x, y) \in W$。 6. 任意の $z \in F_0$ に対し、$(z, y) \in F_0 \times F_0 \subseteq W$。 7. したがって $(x, z) \in W \circ W \subseteq V$ 。すなわち $F_0 \subseteq V(x)$。 8. $V(x) \in \mathcal{F}$ となり、これは $\mathcal{F}$ が x に収束することを意味する。

■

7. 一様空間の距離化可能性：Metrization Lemma

一様構造から距離を構成するための技術的な核心部分です。

補題 7.1：一様空間の距離化可能性 (Metrization Lemma)

一様構造 $\mathcal{U}$ が可算な基本近縁系 $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ を持ち、$\bigcap V_n = \Delta$ かつ $V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n$ を満たすとき、この一様構造を誘導する距離 d が存在する。

【証明の概略】

各 V_n に対して、$f(x,y)$ を $(x,y) \notin V_n$ となる最大の 2^{-n}（なければ 0）とする。 これ自体は三角不等式を満たさないが、

$$d(x,y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} f(z_i, z_{i+1}) \mid z_0 = x, z_k = y \right\}$$

と定義すれば d は距離となる。$V_{n+1}^3 \subseteq V_n$ という条件により、この infimum が一様構造と整合的であることが保証される。

8. ウリゾーンの距離化定理：第二可算性からの飛躍

位相的性質（正規・第二可算）から距離の存在を導く、本稿のクライマックスです。

定理 8.1：ウリゾーンの距離化定理 (Urysohn's Metrization Theorem)

第二可算な正規空間は、距離化可能である。

【完全証明】

ステップ 1：可算個の連続関数の抽出

X は第二可算なので、可算な開基 $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持つ。 ペア (n,m) で $\overline{B_n} \subseteq B_m$ となるもの全体を考える。これは可算個である。 正規空間におけるウリゾーンの補題より、各ペアに対し連続関数 $f_k : X \to [0,1]$ を $f_k(\overline{B_n}) = 0$ かつ $f_k(X \setminus B_m) = 1$ となるようにとる。

ステップ 2：埋め込み

ヒルベルト立方体 $I^\omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$ を考える。I^ω には距離 $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ が入る。 写像 $\Phi : X \to I^\omega$ を $\Phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots)$ と定義する。 各成分 f_k は連続なので、積位相の性質より Φ は連続である。

ステップ3：同相性の証明

1. **単射性**: $x \neq y$ とする。X は T_1 かつ正則なので x の開近傍 U で $y \notin U$ なるものがとれる。さらに $\overline{B_n} \subseteq B_m \subseteq U$ なる基底を $x \in B_n$ となるようにとれる。このペアに対応する f_k は $f_k(x) = 0$ かつ $f_k(y) = 1$ なので $\Phi(x) \neq \Phi(y)$。 2. **逆写像の連続性**: $\Phi(X)$ 上で Φ が開写像であることを示せばよい。$x \in B_n$ とし、ある m で $x \in \overline{B_n} \subseteq B_m$ とする。このときある成分 f_k は $f_k(x) = 0, f_k(X \setminus B_m) = 1$。 I^ω の開集合 $V = \{z \in I^\omega \mid z_k < 1/2\}$ に対し、
$\Phi^{-1}(V \cap \Phi(X)) = \{y \in X \mid f_k(y) < 1/2\} \subseteq B_m$。 これにより $\Phi(x)$ の任意の近傍が、$\Phi(B_m)$ の中に含まれる「像の開集合」を含んでいることがわかり、Φ は X から $\Phi(X)$ への同相写像である。

結論

I^ω は距離空間であり、距離空間の部分空間は距離化可能である。よって X も距離化可能である。

■

9. 結び：抽象から具体へ

正規性という一見「静的」な分離公理が、連続関数という「動的」な対象を生み出し、それが一様構造という「広域的秩序」を経て、最終的に「距離」という「定量的尺度」へと結実するプロセスを辿りました。 この理論の完成により、抽象的な位相空間の上で、微積分学のような具体的な解析を行う正当性が保証されたのです。